Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

MATHEMATIQUES
2ème épreuve

Coefficient 3

Lundi 25 Mai 1981 de 8 heures à 12 heures

Nota : les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

On considère le jeu électronique suivant :

un point lumineux L se déplace par sauts successifs sur un axe d'origine O, et peut à chaque instant se situer en l'un des cinq points P_j d'abscisses j égales à : $-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2$.

Lorsque le point L est en P_j, j élément de $\{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ à l'instant t, la probabilité pour qu'il se positionne en P_k, k élément de $\{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ à l'instant t + 1 est fournie par le tableau ci-dessous :

instant t \ instant t + 1	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2
P_{-2}	0	1	0	0	0
P_{-1}	1/2	0	1/2	0	0
P_0	0	1/2	0	1/2	0
P_1	0	0	1/2	0	1/2
P_2	0	0	0	0	1

Par exemple, si L est en P_0 à l'instant t, il se positionnera en P_{-1} avec la probabilité 1/2, ou en P_1 avec la probabilité 1/2.

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, le point lumineux L est en P_0.

Question 1

Déterminer les probabilités de chacun des trois événements suivants :

1.1. De l'instant $t=0$ à l'instant $t = n$ inclus, le point lumineux ne s'est positionné ni en P_{-2}, ni en P_2.

1.2. De l'instant $t=0$ à l'instant $t = n$, $n > 0$, le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et il se positionnera en P_2 pour la première fois à l'instant $t = n$.

1.3. Le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et se positionne en P_2 pour la première fois.

Question 2

On désigne par X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur l'abscisse du point lumineux à l'instant $t = n$.

2.1. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_i, $i = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4$.
Calculer l'espérance mathématique et la variance des variables aléatoires X_i, $i = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4$.

2.2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_3, X_4).

Question 3

3.1. Déterminer la loi de probabilité de X_{n+1} en fonction de la loi de probabilité de X_n.

3.2. On désigne par a_n la probabilité de l'événement «$X_n = 0$». Etablir une relation de récurrence de la forme $\alpha a_{n+2} + \beta a_n + \gamma a_{n-2} = 0$, $n \geqslant 2$.

3.3. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelles vérifiant la relation de récurrence :

$\alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma u_{n-1} = 0$, $n \geqslant 1$.

3.4. En déduire a_n. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Problème 2

On désire étudier sur un certain nombre d'années les mouvements migratoires d'une population lors des vacances d'été.

L'observation de cette population a conduit à la construction d'un modèle mathématique dont les hypothèses sont les suivantes :

Hypothèse 1

Le territoire sur lequel évolue la population durant les vacances d'été est divisé en trois régions, notées 1, 2, 3.

Hypothèse 2

Chaque année, tout individu de la population étudiée choisit une région et une seule pour y passer toutes ses vacances d'été.

Hypothèse 3

Le choix d'une région par un individu pour y passer ses vacances d'été est un phénomène aléatoire qui évolue dans le temps à partir d'une année initiale appelée année 1.

On note $A_i(n)$, pour i élément de $\{1 ; 2 ; 3\}$ et $n \geqslant 1$, l'événement : «choisir la région i pour y passer ses vacances d'été, l'année n» et $\alpha_1(n) = P[A_1(n)]$, $\alpha_2(n) = P[A_2(n)]$, $\alpha_3(n) = P[A_3(n)]$ les probabilités de choisir l'année n, respectivement les régions 1, 2, 3 pour y passer ses vacances d'été.

Hypothèse 4

$\alpha_1(1) = 0{,}2 ; \alpha_2(1) = 0{,}45 ; \alpha_3(1) = 0{,}35$

Hypothèse 5

La probabilité de choisir la région i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, pour y passer ses vacances l'année n + 1, ne dépend que du choix effectué l'année n .

On note $a_{ij} = P\,[A_i\,(n+1)/A_j\,(n)]$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, la probabilité de choisir la région i l'année n + 1 , sachant que l'année n , on a choisi la région j .

On suppose que, quels que soient i , j éléments de $\{1\,;2\,;3\}$, a_{ij} est indépendant de l'année considérée et que les a_{ij} sont les éléments de la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Hypothèse 6

On suppose que la population étudiée reste inchangée durant toutes les années prises en considération dans ce modèle.

Question 1

1.1. Soit B_n l'évènement «choisir chaque année la région 2 durant les n premières années».
Calculer la probabilité $P\,(B_3)$ de l'événement B_3 .
Exprimer la probabilité $P\,(B_n)$ de l'événement B_n en fonction de n .

1.2. Sachant qu'un individu choisit la région 1 l'année 2, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la région 2 l'année 1 ?

1.3. Calculer la probabilité pour qu'un individu change de région entre la première année et la deuxième année.

Question 2

2.1. Exprimer, en la justifiant, une relation entre les matrices
$\begin{pmatrix} \alpha_1\,(n+1) \\ \alpha_2\,(n+1) \\ \alpha_3\,(n+1) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_1\,(n) \\ \alpha_2\,(n) \\ \alpha_3\,(n) \end{pmatrix}$ puis entre les matrices $\begin{pmatrix} \alpha_1\,(n+1) \\ \alpha_2\,(n+1) \\ \alpha_3\,(n+1) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_1\,(1) \\ \alpha_2\,(1) \\ \alpha_3\,(1) \end{pmatrix}$

2.2. Calculer le déterminant de la matrice M .

2.3. Calculer, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les valeurs propres de M.

2.4. Montrer que, pour tout naturel n supérieur ou égal à 1, la matrice M^n s'écrit sous la forme :

$$M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où λ est un élément de $\mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1, $\overline{\lambda}$ son conjugué,

$P = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix}$ est une matrice inversible à éléments complexes

(on ne cherchera pas à déterminer la valeur des éléments des deux dernières colonnes de P),

$P^{-1} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P

(on ne cherchera pas ici à calculer la valeur des éléments de P^{-1}).

Question 3

On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n \geq 1}$ de type $(m \times q)$ à éléments dans $\mathbb{C}$ converge vers une matrice L de type $(m \times q)$, quand n tend vers l'infini si et seulement si quels que soient i, j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q$, la suite $u_{ij}(n)$ des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne des matrices U_n converge vers l'élément l_{ij} de L, lorsque n tend vers l'infini.

On note alors $L = \lim\limits_{n \to \infty} U_n$.

On **admettra** le résultat suivant :

Etant donné une suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de matrices de type $(m \times q)$ à éléments dans $\mathbb{C}$ qui converge vers la matrice L, lorsque n tend vers l'infini et V, W deux matrices telles que les produits $V.L$ et $L.W$ soient définis, on a alors :

$$\lim_{n \to \infty} V.U_n = V.L \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} U_n.W = L.W.$$

3.1. Montrer que la suite de matrices $(M^n)_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.

3.2. Soient $U = (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ et $V = (v_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ deux matrices telles que la somme des éléments de chaque colonne de chacune d'elles soit égale à 1. Montrer qu'il en est de même pour la matrice $U.V$.

3.3. Déduire de ce qui précède les valeurs des éléments a, a', a'' de la matrice P^{-1}.

3.4. Montrer que les suites $\left(\alpha_1(n)\right)_{n \geq 1}$, $\left(\alpha_2(n)\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\alpha_3(n)\right)_{n \geq 1}$ convergent.

Calculer leurs limites.